UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

1992
25ème anniversaire

N° 1754

Programme 1
Architectures parallèles, Bases de données, Réseaux et Systèmes distribués

ORDRES REPRÉSENTABLES PAR DES TRANSLATIONS DE SEGMENTS DANS LE PLAN

Vincent BOUCHITTÉ
Roland JÉGOU
Jean-Xavier RAMPON

Octobre 1992

RR-1754

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTEMES ALEATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CEDEX FRANCE
Tél. : 99 84 71 00 - Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Ordres représentables par des translations de segments dans le plan

Publication Interne n° 672 - Juillet 1992 - 8 pages - Programme 1

Vincent BOUCHITTÉ
LIP-IMAG, CNRS URA 1398, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07;
e-mail: vbouchit@lip.ens-lyon.fr

Roland JÉGOU
Dept. Informatique Appliquée, ENS des Mines de Saint-Etienne, 158, cours Fauriel, 42023 Saint-Etienne Cedex 2;
e-mail: jegou@degas.emse.fr

Jean-Xavier RAMPON
IRISA, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France;
e-mail: rampon@irisa.fr

Résumé

Certains ensembles ordonnés peuvent être représentés par des translations de figures convexes du plan. Il est prouvé, dans cette note, que les ordres sans N et les ordres d'intervalles admettent une telle représentation mais que le nombre de directions ne peut être borné. En revanche, les arbres sont représentables avec seulement deux directions. Pour toutes ces classes, les convexes utilisés sont des segments.

Representing Orders by translating line–segments in the plane

Abstract:

Some orders can be represented by translating convex figures in the plane. It is proved that N–free and interval orders admit such representations with an unbounded numbers of directions. Tree-like orders are shown to be 2–directional. In all cases line segments can be used as convexes.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE (U.R.A. 227) UNIVERSITÉ DE RENNES I INSA DE RENNES
INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE (UNITÉ DE RECHERCHE DE RENNES)

Ordres représentables par des translations de segments dans le plan

Contents

1 Introduction

La notion de représentation d'ensembles ordonnés finis par translations de convexes (qui seront toujours supposés fermés et bornés) disjoints dans le plan a été introduite par I. Rival et J. Urrutia [1]. Etant donnés n ensembles convexes disjoints $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du plan, chacun muni d'un vecteur unitaire de translation $\vec{d_i}$, appelé direction par abus de langage, on dit que A_j obstrue A_i s'il existe un point p_i de A_i et un point p_j de A_j tels que $\vec{p_i p_j} = \alpha\, \vec{d_i}$ où α est un réel strictement positif. La fermeture transitive de cette relation est appelée relation de blocage. Les objets peuvent être séparés séquentiellement (c'est-à-dire l'un après l'autre suivant une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$) par translation suivant leurs directions et sans collision si et seulement si la relation de blocage est un ordre partiel. Dans ce contexte le lecteur trouvera dans [2] un panorama d'applications et de résultats concernant divers problèmes de séparabilité dynamique d'objets.

Inversement, on dira qu'un graphe orienté G est directionnel s'il est isomorphe à une relation de blocage; les convexes ainsi que leurs directions définissent une représentation directionnelle de G. Nous dirons que G est k-directionnel si k directions distinctes suffisent. I. Rival et J. Urrutia [1] ont montré qu'une relation de blocage est 1-directionnelle si et seulement si c'est un treillis planaire tronqué (on supprime éventuellement l'infimum et le supremum) et ont établi l'existence de graphes non directionnels. Ces résultats les ont amené à poser le problème suivant : étant donné un ensemble fini partiellement ordonné $P = (X, \leq_P)$, P est-il directionnel ? Si oui, quel est le plus petit nombre de directions nécessaires à sa représentation ? Nous montrons dans cette note que certains ordres admettent une représentation directionnelle par segments, c'est-à-dire que les convexes sont des segments de droite.

Avant de présenter ces résultats, il nous faut rappeler quelques notions essentielles et fixer certaines notations. Soit $P = (X, \leq_P)$ un ordre partiel, si x et $y \in X$ on dit que x est couvert par y (ou y couvre x) et on note $x -\!\!<_P y$ si $x <_P y$ et $\forall z \in X$ avec $x \leq_P z \leq_P y$ alors $z = x$ ou $z = y$, cette relation binaire définit le graphe de Hasse de P tandis que le graphe non orienté associé est appelé graphe de couverture de P. Nous noterons $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ l'ensemble des extensions linéaires de P, c'est-à-dire l'ensemble des ordres totaux sur X contenant P. Enfin, nous noterons $Min(P)$ l'ensemble des éléments minimaux de P, $S(x)$ l'ensemble des successeurs de x dans P, $S(x) = \{y \in X, x \leq_P y\}$ et $S_{dir}(Y)$ (resp. $P_{dir}(Y)$) l'ensemble des successeurs (resp. prédécesseurs) directs des éléments de $Y \subseteq X$ dans P, $S_{dir}(Y) = \{z \in X, \exists y \in Y, y -\!\!<_P z\}$ (resp. $P_{dir}(Y) = \{z \in X, \exists y \in Y, z -\!\!<_P y\}$).

2 Une condition suffisante pour la représentation par segments

Soient $P = (X, \leq_P)$ un ordre et $L \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$, $L = x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, considérons $M(L)$ la matrice carrée $n \times n$ définie sur X par : la colonne j $(1 \leq j \leq n)$ contient uniquement x_j, celui-ci pouvant apparaître sur plusieurs lignes, la ligne n est constituée des éléments de $Min(P)$ et la ligne i des éléments de $S_{dir}(x_{n-i})$. $M(L)$ est triangulaire inférieure par rapport à la seconde diagonale, autrement dit, $Mi, j = \emptyset$ pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq n-j$. Pour tout x dans X posons $Ind(x) = \{j \in \{1, \ldots, n\}, x_j \in P_{dir}(x)\}$, $a(x) = min(Ind(x))$ et $b(x) = max(Ind(x))$.

Dans le plan muni du repère$(-1,0),(0,1)$ mais où les angles sont toujours définis de la façon habituelle, considérons la construction géométrique suivante définie à partir de $M(L)$. Pour tout $j \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$, associons à x_j deux droites parallèles de pente $\Theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ notées D^j_{Inf} et D^j_{Sup} intersectant l'axe horizontal en x^j_{Inf} et x^j_{Sup} respectivement. L'ensemble des $2n$ droites doit vérifier les conditions :

(i) $\Theta_n = \frac{\pi}{2} > \Theta_{n-1} > \ldots > \Theta_1 > 0$,

(ii) $0 = x^n_{Inf} < x^n_{Sup} < x^{n-1}_{Inf} < x^{n-1}_{Sup} < \ldots < x^1_{Inf} < x^1_{Sup}$ et

(iii) pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ D^j_{Sup} est située au-dessous de $D^{j+1}_{Inf} \cap D^{j+2}_{Sup}$.

Une telle construction s'obtient facilement par récurrence sur j à partir des deux couples de droites associés à x_n et x_{n-1}.

Soit $R(L)$ la relation de blocage induite par la représentation directionnelle obtenue en associant à chaque x_j un segment $s(x_j)$ vérifiant :

(i) $s(x_j)$ est de pente Θ_j , est situé strictement entre D^j_{Inf} et D^j_{Sup} et a pour direction Θ_j orientée vers les ordonnées croissantes.

(ii) si $x_j \in Min(P)$ alors $s(x_j)$ a son extrémité supérieure sur l'axe des abscisses, sinon $s(x_j)$ a son extrémité inférieure sur $D^{a(x_j)}_{Inf}$ et son extrémité supérieure sur $D^{b(x_j)}_{Sup}$.

Definition 1 *Un ordre P a la propriété de contiguïté s'il existe L dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ telle que, pour tout x de X, $P_{dir}(x)$ est un intervalle de L.*

Fait : $\exists L \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$ telle que $R(L) \cong P$ si et seulement si P a la propriété de contiguïté. De plus la relation d'obstruction obtenue est isomorphe au graphe de Hasse de P. D'où :

Theorem 2.1 *Tout ensemble ordonné $P = (X, \leq_P)$ vérifiant la propriété de contiguïté admet une représentation k-directionnelle par segments où $k \leq \mid X \mid$.*

Le nombre de directions peut être réduit dans certains cas en regroupant les éléments ayant mêmes successeurs. En effet, la relation binaire $\leq_S$ définie sur X par $x \leq_S y \iff S(y) \subseteq S(x)$ est un préordre, l'ensemble quotient, relativement à $\leq_S$, est un ordre noté $Succ(P)$. Pour $L \in \mathcal{L}(Succ(P))$, $L = S_1 < S_2 < \ldots < S_m$, notons $Ind_S(x) = \{j \in \{1, 2, \ldots, m\}, x \in S_{dir}(Sj)\}$ et $a(x) = min(Ind_S(x))$ et $b(x) = max(Ind_S(x)), \forall x \in X$. On lui associe la matrice carrée $M(L)$ définie par : la colonne j $(1 \leq j \leq m)$ contient exactement les éléments de S_j, la ligne m est constituée des éléments de $Min(P)$ et la ligne i $(1 \leq i \leq m-1)$ des éléments de $S_{dir}(S_{m-i})$. Appliquons sur $M(L)$ la construction précédente en représentant les éléments de S_j par des segments de pente Θ_j situés sur des droites distinctes à l'intérieur de la bande déterminée par D^j_{Inf} et D^j_{Sup}. On peut alors énoncer :

Theorem 2.2 *Tout ensemble ordonné P ayant une extension linéaire $L = S_1 < S_2 < \ldots < S_m$ de $Succ(P)$ telle que $Ind_S(x)$ est un intervalle de $\{1, 2, \ldots, m\}$ admet une représentation m-directionnelle par segments.*

Appelons N l'ordre défini sur $\{a, b, c, d\}$ par $a < c$, $b < c$ et $b < d$ uniquement. $P = (X, \leq_P)$ est dit sans N si son graphe de Hasse ne contient pas de N comme sous-graphe. Toute extension linéaire L de $Succ(P)$ vérifie $\mid Ind_S(x) \mid \leq 1$ $\forall x \in X$. Le théorème 2.2 est donc applicable.

Corollary 2.3 *Tout ordre $P = (X, \leq_P)$ sans N admet une représentation k-directionnelle par segments avec $k \leq \mid Succ(P) \mid$.*

Un ordre $P = (X, \leq_P)$ est dit d'intervalles s'il est isomorphe à un ensemble d'intervalles $\{I_x, x \in X\}$ de la droite réelle où $I_x < I_y$ signifie $sup(I_x) < inf(I_y)$, ou bien de manière équivalente $Succ(P)$ est un ordre total. Le théorème 2.2 s'applique et l'on a :

Corollary 2.4 *Tout ordre d'intervalles P admet une représentation k-directionnelle par segments où $k \leq \mid Succ(P) \mid$.*

3 Nombre de directions

I. Rival et J. Urrutia [1] ont montré que pour tout entier $k \geq 1$ il existe des ordres n'admettant pas de représentation k-directionnelle. Reprenant leur preuve nous affinons ce résultat et montrons l'existence de classes d'ordres directionnels contenant un ordre non k-directionnel pour tout $k \geq 1$ fixé.

Soient $P = (X, \leq_P)$ et $\{Q_x, x \in X\}$ des ensembles ordonnés, nous noterons $Q = \sum_{x \in X} Q_x$ l'ordre obtenu en substituant Q_x à x dans P et tel que $a \leq_Q b$ si $a, b \in Q_x$ et $a \leq_{Q_x} b$ ou bien $a \in Q_x$, $b \in Q_y$ et $x \leq_P y$. Une classe d'ordre $\mathcal{C}$ est A-invariante si pour tout P dans $\mathcal{C}$, $Q = \sum_{x \in X} A_x$ où $\{A_x, x \in X\}$ est un ensemble d'antichaînes (c'est-à-dire d'ordres constitués d'éléments deux à deux incomparables) est toujours dans $\mathcal{C}$. On appelle coloration d'un graphe non orienté $G = (X, E)$ toute fonction c de X dans $\mathbb{N}$ telle que $c(x) \neq c(y)$ quand x et y sont reliés par une arête. Le nombre chromatique de G est le nombre minimal de couleurs d'une coloration. Le nombre chromatique d'un ordre est celui de son graphe de couverture. Une classe d'ordres $\mathcal{C}$ est à coloration non bornée si pour tout entier $k \geq 1$ il existe un ordre de la classe dont le nombre chromatique est au moins k.

Soit $\mathcal{C}$ une classe d'ordres A-invariante et à coloration non bornée. Soit $P = (X, \leq_P)$ un ordre de $\mathcal{C}$ de nombre chromatique $k \geq 2$. Alors $Q = \sum_{x \in X} A_x$, où $\forall x \in X$ A_x est une antichaîne de cardinal k, est au moins k-directionnel. Si Q est *(k-1)*-directionnel, tout antichaîne A_x contient 2 éléments ayant même direction $\vec{d_x}$. Ceci entraîne $\vec{d_x} \neq \vec{d_y}$ pour $x -\!\!< _P y$, ce qui permet d'obtenir une coloration de P avec *(k-1)* couleurs. D'où :

Theorem 3.1 *Dans toute classe d'ordres A-invariante et à coloration non bornée, il existe pour tout $k \geq 2$ un ordre P_k qui n'est pas k-directionnel.*

D'après [3] les ordres sans N et les ordres d'intervalles sont des classes à coloration non bornée, ces classes étant de plus A-invariantes nous avons :

Corollary 3.2 *Corollaire 3.1. Pour tout entier $k \geq 2$ il existe des ordres sans N et des ordres d'intervalles dont la représentation nécessite au moins k directions.*

Si on ne peut pas espérer borner le nombre de directions pour les classes envisagées précédemment, il existe néanmoins des classes d'ordres intéressantes que l'on peut représenter en utilisant seulement deux directions. Par abus de langage nous appellerons arbre tout ordre dont le graphe de couverture est un arbre, i.e. connexe et sans cycle.

Theorem 3.3 *Tout arbre P admet une représentation 2-directionnelle par segments.*

Proof. Si $|P| \geq 2$ alors il existe (i) soit un élément minimal x couvert par un unique élément y (ii) soit un élément maximal x couvrant un unique élément y. Supposons avoir une représentation 2-directionnelle par segments de $P - \{x\}$ où tout segment est soit horizontal (se déplaçant vers la droite) soit vertical (se déplaçant vers le haut). Un segment $s(z)$ horizontal (resp. vertical) possède une bande semi-infinie verticale (resp. horizontale) Δ_z située au-dessus (resp. à droite) de $s(z)$ s'appuyant sur $s(z)$ et n'intersectant aucun des segments représentant des éléments incomparables à z dans P. En outre deux segments distincts ne sont jamais colinéaires. Nous supposons $s(y)$ horizontal. Dans le cas (i), P étant fini, il existe une bande horizontale Δ

d'épaisseur non nulle sous la droite d définie par $s(y)$ et ne coupant pas de segment entièrement situé sous d. Alors x peut être représenté par un segment vertical $s(x)$ à l'intérieur de Δ et du prolongement de Δ_y sans obstruer de segment vertical placé sous $s(y)$. En choisissant $s(x)$ assez petit, il est possible d'assurer l'existence d'une bande horizontale Δ_x associée à $s(x)$. Le cas (ii) se traite de la même manière en plaçant $s(x)$ verticalement et suffisamment loin à droite de la représentation de $P - \{x\}$ pour ne pas être bloqué par un autre segment. Il faut bien sûr que $s(x)$ obstrue $s(y)$.

References

[1] I. Rival et J. Urrutia, *Representing Orders on the Plane by Translating Convex Figures*, Order, 4, 319-339, 1988.

[2] G.T. Toussaint, *Movable Separability of Sets*, Computational Geometry, 335–375, North-Holland, 1985.

[3] S. Felsner, J. Gustedt, M. Morvan et J.-X. Rampon, *Constructing Colorings for Diagrams*, à paraître dans les actes de 2^{nd} Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, 22–24 May 1991.

LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES PARUES A L'IRISA

PI 661 REACHABILITY ANALYSIS ON DISTRIBUTED EXECUTIONS
Claire DIEHL, Claude JARD, Jean-Xavier RAMPON
Juin 1992, 18 pages.

PI 662 RECONSTRUCTION 3D DE PRIMITIVES GEOMETRIQUES PAR VISION ACTIVE
Samia BOUKIR, François CHAUMETTE
Juin 1992, 40 pages.

PI 663 FILTRES SEMANTIQUES EN CALCUL PROPOSITIONNEL
Raymond ROLLAND
Juin 1992, 22 pages.

PI 664 REGION-BASED TRACKING IN AN IMAGE SEQUENCE
François MEYER, Patrick BOUTHEMY
Juin 1992, 50 pages.

PI 665 CORRECTNESS OF AUTOMATED DISTRIBUTION OF SEQUENTIAL PROGRAMS
Cyrille BARREAU, Benoît CAILLAUD, Claude JARD, René THORAVAL
Juin 1992, 32 pages.

PI 666 AGREGATION FAIBLE DES PROCESSUS DE MARKOV ABSORBANTS
James LEDOUX, Gerardo RUBINO, Bruno SERICOLA
Juillet 1992, 30 pages.

PI 667 MODELES D'EVALUATION DE LA FIABILITE DU LOGICIEL ET TECHNIQUES DE VALIDATION DE SYSTEMES DE PREDICTION : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE
James LEDOUX
Juillet 1992, 76 pages.

PI 668 TWO COMPLEMENTARY NOTES ON SKEWED-ASSOCIATIVE CACHES
André SEZNEC
Juillet 1992, 10 pages.

PI 669 PARALLELISATION D'UN ALGORITHME DE DETECTION DE MOUVEMENT SUR UNE ARCHITECTURE MIMD
Fabrice HEITZ, Sergui JUFRESA, Etienne MEMIN, Thierry PRIOL
Juillet 1992, 34 pages.

PI 670 UN RESEAU SYSTOLIQUE INTEGRE POUR LA CORRECTION DE FAUTES DE FRAPPE
Dominique LAVENIER
Juillet 1992, 120 pages.

PI 671 EARLY WARNING OF SLIGHT CHANGES IN SYSTEMS AND PLANTS WITH APPLICATION TO CONDITION BASED MAINTENANCE
Qinghua ZHANG, Michèle BASSEVILLE, Albert BENVENISTE
Juillet 1992, 32 pages.

PI 672 ORDRES REPRESENTABLES PAR DES TRANSLATIONS DE SEGMENTS DANS LE PLAN
Vincent BOUCHITTE, Roland JEGOU, Jean-Xavier RAMPON
Juillet 1992, 8 pages.

ISSN 0249-6399